Glava VI

Sličnost

1. Definicije i osobine proporcionalnih duži

Uočimo $d, d', d_1, d_1' \in D$. Neka su A, A' tačke jednog kraka pravog ugla s tjemenom P tako da je: PA jedna reprezentacija klase d, PA' jedna reprezentacija klase d';
Neka su B, B' tačke drugog kraka istog ugla tako da je:
PB jedna reprezentacija klase d_1,
PB' jedna reprezentacija klase d_1'.

Definicija: Kažemo da se d odnosi prema d' kao d_1 prema d_1' ili da je uređeni par (d, d') proporcionalan uređenom paru (d_1, d_1') i to zapisujemo ovako

$$d : d' = d_1 : d_1'$$

ako je prava AB paralelna pravoj $A'B'$.

Ako su EF, $E'F'$, E_1F_1 i $E_1'F_1'$ proizvoljne reprezentacije klase d, d', d_1 i d_1' pod istim uslovima kao i naprijed kažemo da se EF

odnosi prema $E'F'$ kao E_1F_1 prema $E_1'F_1'$ ili da je uređen par $(EF, E'F')$ proporcionalan uređenom paru $(E_1F_1, E_1'F_1')$, to zapisujemo ovako

$$EF : E'F' = E_1F_1 : E_1'F_1'$$

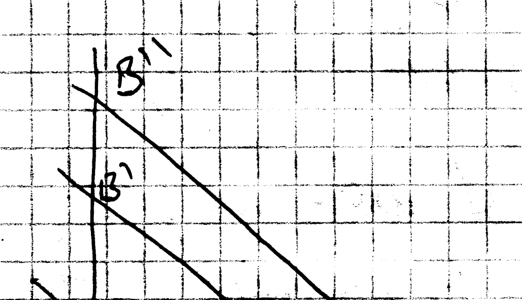
Iz definicije odmah slijedi da je

$$d : d' = d_1 : d_1' \Rightarrow \begin{cases} d_1 : d_1' = d : d' \\ d' : d = d_1' : d_1 \\ d_1' : d_1 = d' : d \end{cases}$$

<u>Teorema 6.1.1.</u>

$$(d : d' = d_1 : d_1',\ d' : d'' = d_1' : d_1'') \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (d : d'' = d_1 : d_1'').$$

<u>Dokaz.</u> Uočimo na jednom kraku pravog ugla sa tjemenom P tačke A, A', A'', a na drugom kraku istog ugla tačke B, B', B'' tako da su PA, PA', PA'' reprezentacije klasa d, d', d'', a PB, PB', PB'' reprezentacije klasa d_1, d_1', d_1''.



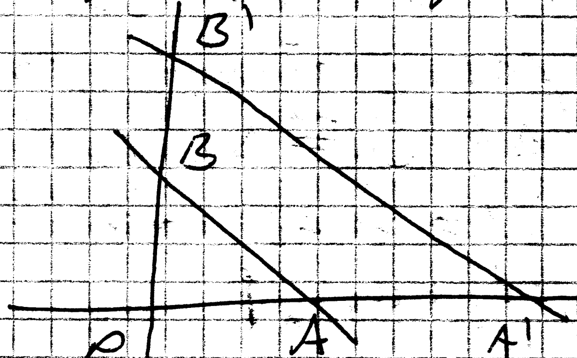
Prema definiciji, a s obzirom na uslove teoreme, je $\underline{AB \parallel A'B'}$ i $\underline{A'B' \parallel A''B''}$.

Kako je u skupu pravih relacija „... je paralelna ..." tranzitivna, to je [redacted] $\underline{AB \parallel A''B''}$ a to prema definiciji, znači $d : d'' = d_1 : d_1''$

Teorema 6.1.2. $(d = d_1 \text{ i } d' = d_1') \Rightarrow (d : d' = d_1 : d_1')$.

Dokaz. Svaki od trouglova PAB, $PA'B'$ je pravougli, jednakokraki pa je

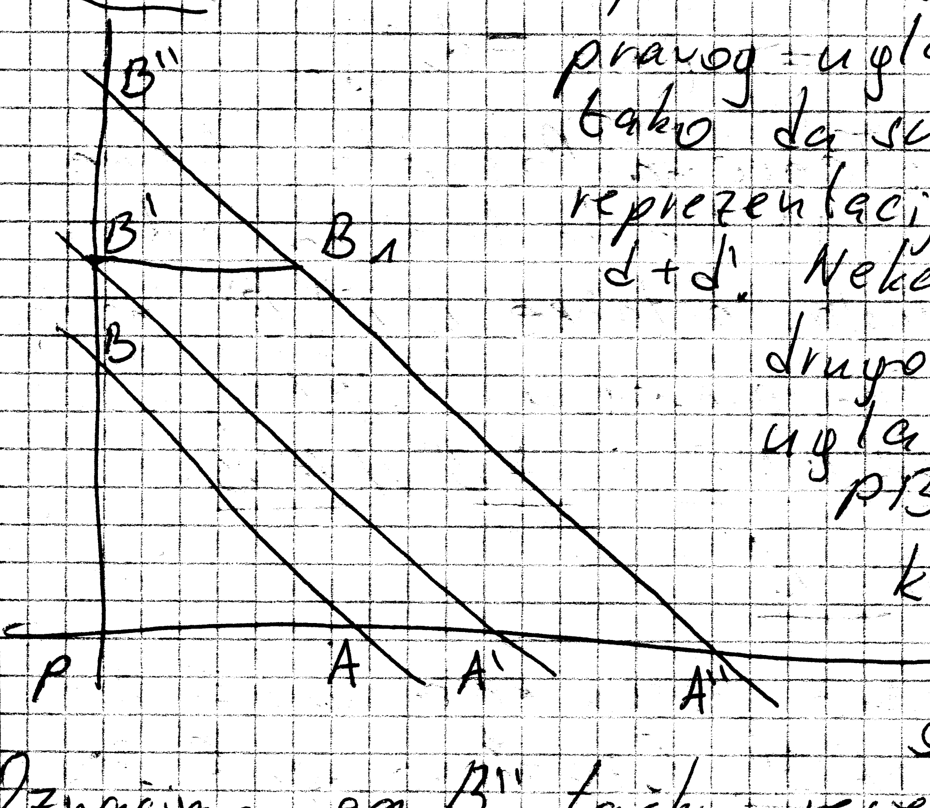
$$\measuredangle PAB \cong \measuredangle PA'B' \cong \frac{1}{2} d,$$ pri čemu je d pravi ugao. Sada je jasno da je $AB \parallel A'B'$.



Teorema 6.1.3

$(d : d' = d_1 : d_1') \Rightarrow ((d + d') : d' = (d_1 + d_1') : d_1')$.

Dokaz. Neka su A, A', A'' tačke jednog kraka pravog ugla s tjemenom P tako da su PA, PA', PA'' reprezentacije klasa d, d', $d + d'$. Neka su B i B' tačke drugog kraka istog ugla tako da su PB, PB' reprezentacije klasa d_1, d_1'. Iz uslova teoreme slijedi $AB \parallel A'B'$.



Označimo sa B'' tačku presjeka prave koja sadrži A'' a paralelna je sa AB i drugog kraka pravog ugla. Tada je

$$(d + d') : d' = d'' : d_1',$$ gdje je

d'' ona klasa kojoj pripada PB''. Dokazaćemo da je $d'' = d_1 + d_1'$.
U tu svrhu posmatrajmo onu normalu prave PB koja sadrži tačku B' i označimo sa B_1 presjek te normale i prave $A''B''$. Tada su uglovi $\triangle PAB$ podudarni uglovima $\triangle B'B_1B''$. Pored toga, četverougao $A'A''B_1B'$ je paralelogram, pa je $B'B_1 \cong A'A'' \cong PA$. Dakle, $\triangle PAB \cong \triangle B'B_1B''$, otuda je $PB = B'B''$, što znači da je PB'' reprezentacija klase $d_1 + d_1'$. ∎

Iz date definicije i aksiome paralelnosti odmah proizlazi tačnost sljedeće teoreme

Teorema 6.1.4. $(d : d' = d_1 : d_1' \text{ i } d : d'' = d_1 : d_1'') \Rightarrow$

$$\Rightarrow (d_1' = d_1'').$$

Teorema 6.1.5. (Teorema Pascala). Neka su tačke A, A' i A'' incidentne sa jednim krakom pravog ugla, a tačke B, B', B'' incidentne sa drugim krakom pravog ugla. Ako je

$$AB' \parallel A'B \text{ i } AB'' \parallel A''B,$$

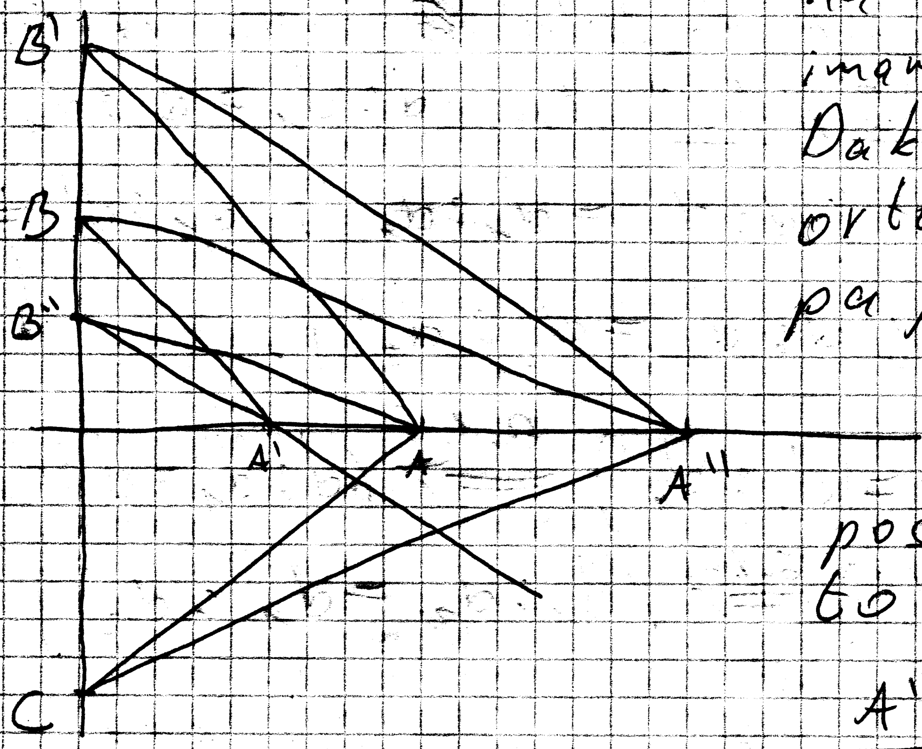
onda je $A'B'' \parallel A''B'$

Dokaz. Posmatrajmo prava koja sadrži A i normalna je na $A'B''$. Označimo sa C presjek te normale i prave PB. Pošto su $B''A'$ i AP visine u trouglu $AB''C$, to je tačka A' ortocentar tog trougla pa je

$$A'C \perp AB''.$$

To znači da je za $\triangle CA''B$ tačka A' orto centar pa je $\underline{A'B \perp A''C}$. Odatle s obzirom na uslov teoreme, imamo $\underline{AB' \perp A''C}$. Dakle, tačka A je ortocentar $\triangle CA''B'$, pa je $\underline{AC \perp B'A''}$. Kako je, prema pretpostavci $\underline{AC \perp A'B''}$, to je

$$\underline{A''B' \parallel A'B''}.$$



Teorema 6.1.6.

$$(d : d' = d_1 : d_1') \Rightarrow (d : d_1 = d' : d_1').$$

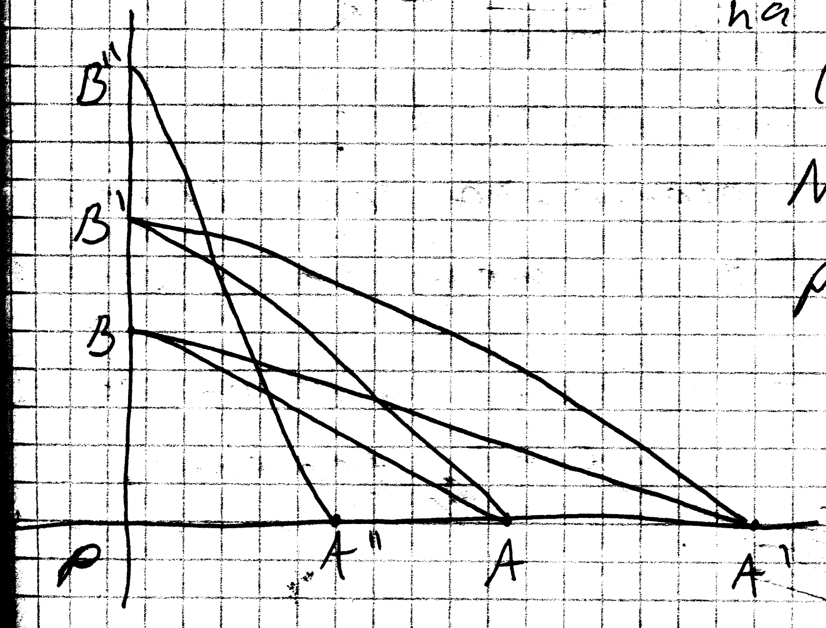
Dokaz. Neka su A i A' tačke jednog a B i B' tačke drugog kraka pravog ugla sa temenom P tako da su PA, PA' reprezentacije klasa d, d' a PB, PB' reprezentacije klasa d_1, d_1'. Tada je, s obzirom na uslov teorema

(1) $\underline{AB \parallel A'B'}$

Neka je A'' tačka prvog a B'' tačka drugog kraka ugla tako da je

$PA'' \cong PB$ i

$PB'' \cong PA'$.



Tada je (2) $A''B'' \parallel A'B''$

Na osnovu teoreme Paskala ~~[illegible]~~ sada iz (1) i (2) slijedi $A''B' \parallel AB''$ tj. $d : d_1 = d' : d_1'$.

Teorema 6.1.7. $(d : d' = d_1 : d_1', \ d_1 : d_1' = d_2 : d_2') \Rightarrow (d : d' = d_2 : d_2')$.

Dokaz. $(d : d' = d_1 : d_1') \xRightarrow{6.1.6} (d : d_1 = d' : d_1')$

$(d_1 : d_1' = d_2 : d_2') \xRightarrow{6.1.6} (d_1 : d_2 = d_1' : d_2')$

Sada

$(d : d_1 = d' : d_1', \ d_1 : d_2 = d_1' : d_2') \xRightarrow{6.1.1} $

$(d : d_2 = d' : d_2') \xRightarrow{6.1.6} (d : d' = d_2 : d_2')$.

2. Proporcionalnost duži i aksiome neprekidnosti

U glavi IV definisali smo razmjera dva elementa skupa $\mathcal{D}$. Pokazali smo da, za svako $d, d' \in \mathcal{D}$ broj $\frac{m(d)}{m(d')} = k$,

gdje je ~~ka~~ k pozitivan realan broj.

Ako su data četiri elementa toga skupa, recimo d, d', d_1 i d_1', mogu se posmatra razmjere $\frac{d}{d'}$ i $\frac{d_1}{d_1'}$. U vezi sa ovim navest ćemo teoremu.

Teorema 6.2.1. Iz

(1) $d : d' = d_1 : d_1'$

slijedi

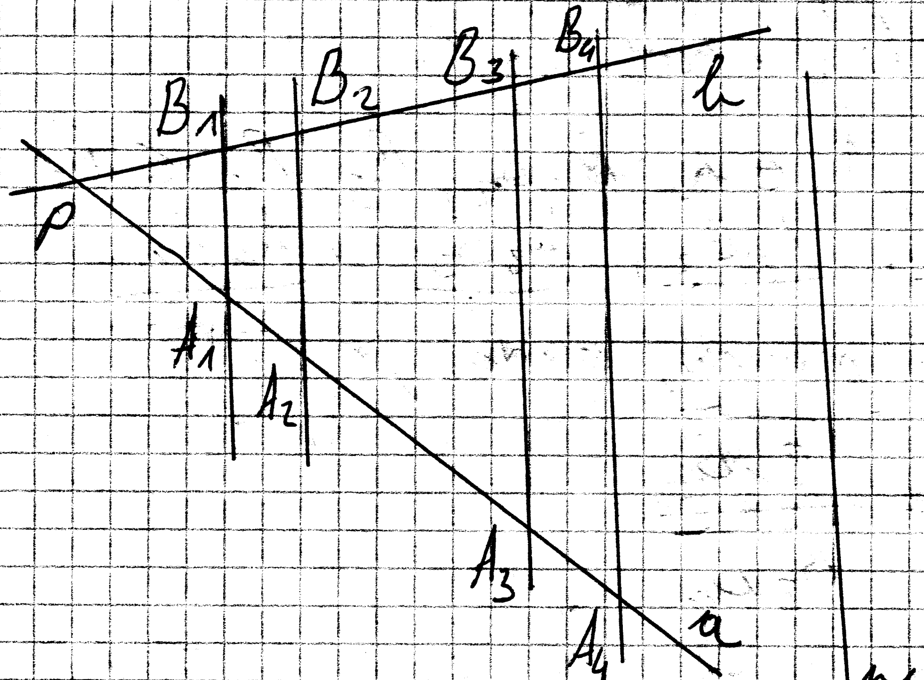
(1') $\frac{d}{d'} = \frac{d_1}{d_1'}$

Obrnuto, iz (1') slijedi (1).

Primjedba 6.2.1 Primjetimo da je uslov (1') ekvivalentan uslovu

$$\frac{m(d)}{m(d')} = \frac{m(d_1)}{m(d_1')}$$

Označimo sa B_1, B_2, B_3 i B_4 projekcije tačaka A_1, A_2, A_3 i A_4 na prava b u pravca (p).



Na osnovu naprijed izloženog je

$m(A_1A_2) : m(A_3A_4) = m(B_1B_2) : m(B_3B_4)$, tj.

$A_1A_2 : A_3A_4 = B_1B_2 : B_3B_4$. Ako je $a \| b$ onda je $A_1A_2 \cong B_1B_2$ i $A_3A_4 \cong B_3B_4$. Tako je dokazana sljedeća teorema.

Teorema 6.3.1. (Teorema Talesa).

Ako A_1, A_2, A_3 i A_4 pripadaju pravoj a, B_1, B_2, B_3 i B_4 pravoj b i ako

$$A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$$

onda je

$$A_1A_2 : A_3A_4 = B_1B_2 : B_3B_4.$$

Primjedba 6.3.1. Ako uzmemo u obzir definiciju razmjere dva vektora datu u prethodnoj glavi, onda teoremu Talesa možemo iskazati ovako:

Ako $A_1, A_2, A_3, A_4 \in a$, $B_1, B_2, B_3, B_4 \in b$ a prave A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 i A_4B_4 pripadaju istom pravcu, onda je

$$\frac{\overrightarrow{A_1A_2}}{\overrightarrow{A_3A_4}} = \frac{\overrightarrow{B_1B_2}}{\overrightarrow{B_3B_4}}.$$

Teorema 6.3.2. (Obrnuta teorema Talesa).

Ako su zadovoljeni uslovi

1) $A_1, A_2, A_3, A_4 \in a$, $B_1, B_2, B_3, B_4 \in b$;

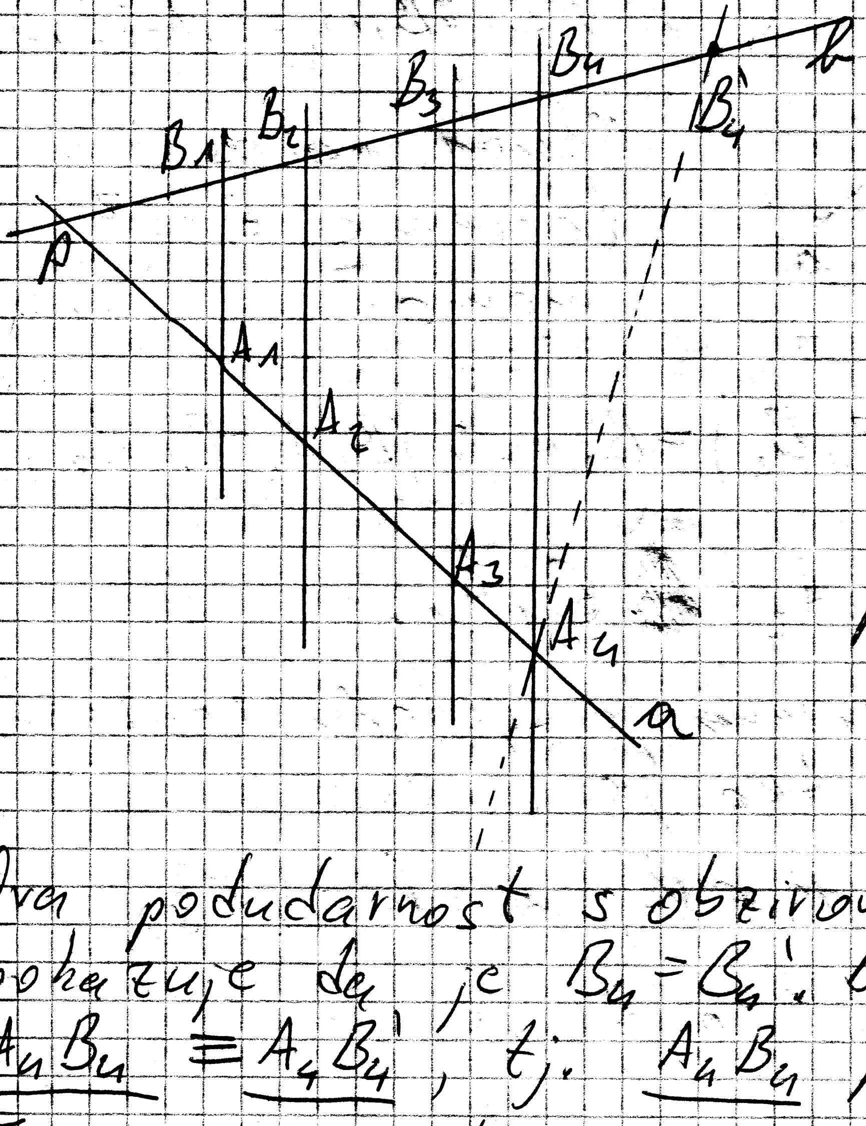
2) $A_1A_2 : A_3A_4 = B_1B_2 : B_3B_4$ ili, što je isto

$$\frac{\overrightarrow{A_1A_2}}{\overrightarrow{A_3A_4}} = \frac{\overrightarrow{B_1B_2}}{\overrightarrow{B_3B_4}};$$

3) $\underline{A_1B_1} \parallel \underline{A_2B_2} \parallel \underline{A_3B_3}$,

onda je i prava A_4B_4 element pravca 3).

Dokaz. Ako prava A_4B_4 ne pripada pravcu 3), posmatrajmo pravu koja pripada tom pravcu a sadrži A_4. Označimo sa B_4' tačku



presjeka te prave i prave b. Prema teoremi Talesa je

$$A_1A_2 : A_3A_4 = B_1B_2 : B_3B_4'.$$

Ako ovo uporedimo sa uslovom 2) i primijenimo teoremu 6.1.4. imamo

$$B_3B_4 = B_3B_4'.$$

Ova podudarnost s obzirom na teoremu 2.1.2. pokazuje da je $B_4 = B_4'$. Drugim riječima $\underline{A_4B_4} \equiv \underline{A_4B_4'}$, tj. $\underline{A_4B_4}$ pripada pravcu 3).

Teorem je dokazan.

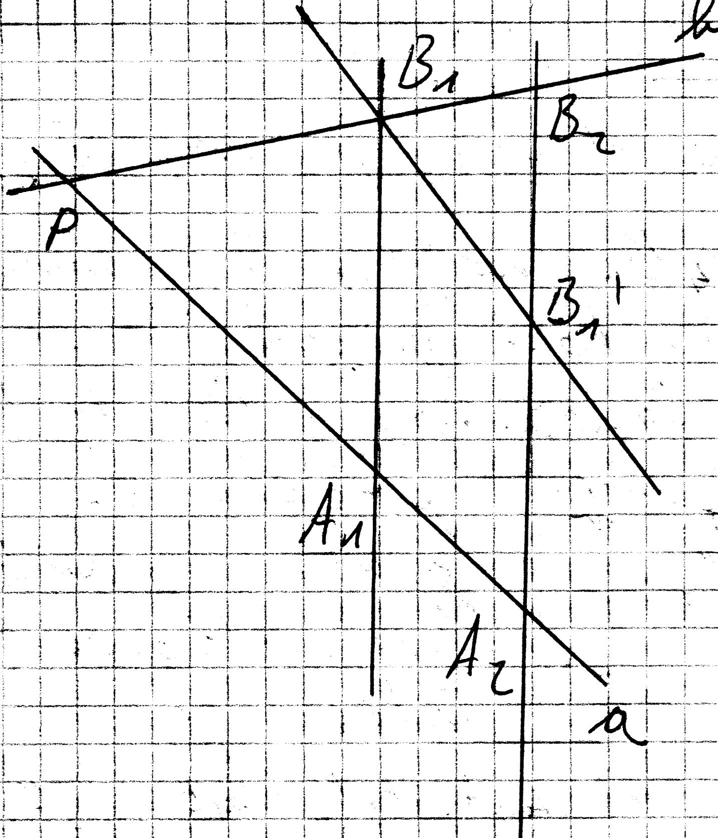
Neka sada

$A_1, A_2 \in a$, $B_1 B_2 \in b$, $\underline{A_1B_1} \parallel \underline{A_2B_2}$, $a \cap b = \{p\}$

Tada, prema teoremi Talesa, je

$$pB_1 : pB_2 = pA_1 : pA_2.$$

Uočimo pravu koja sadrži B_1 a pripada pravcu (a).



Neka je B_1' presek te prave i prave A_2B_2. Primenom teoreme Talesa dobijemo

$$PB_2 : B_1B_2 = B_2A_2 : B_1'B_2$$

Otuda, na osnovu teoreme 6.1.3. imamo

$$PB_2 : (PB_2 - B_1B_2) = B_2A_2 : (B_2A_2 - B_1'B_2),$$

tj. $PB_2 : PB_1 = B_2A_2 : B_1A_1$.

Na taj način dokazana je sledeća teorema.

__Teorema 6.3.3.__ Ako je

$A_1, A_2 \in a$, $B_1, B_2 \in b$, $a \cap b = \{P\}$,

$\underline{A_1B_1} \parallel \underline{A_2B_2}$, onda je

$PB_2 : PB_1 = B_2A_2 : B_1A_1$, ili što je isto

$$\frac{\overrightarrow{PB_2}}{\overrightarrow{PB_1}} = \frac{\overrightarrow{B_2A_2}}{\overrightarrow{B_1A_1}}.$$

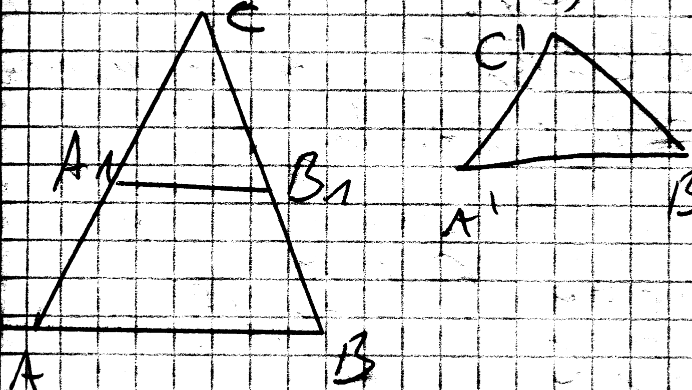
__Teorema 6.3.4.__ Ako je u trouglovima ABC i $A'B'C'$ $\measuredangle A \cong \measuredangle A'$, $\measuredangle B \cong \measuredangle B'$ i

$\measuredangle C \cong \measuredangle C'$, onda je

...) $AC : AB : BC = A'C' : A'B' : B'C'$.

Dokaz. Ako je $AC \cong A'C'$, onda je $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ pa je uslov (*) identički zadovoljen.

Ako je $AC > A'C'$, postoji tačka A_1 takva da je $A \cdot A_1 \cdot C$ i $A_1C \cong A'C'$.



Ako prava koja sadrži A_1 a paralelna je sa AB siječe pravu BC u B_1 onda je $\triangle A_1B_1C \cong \triangle A'B'C'$. S druge strane, na osnovu teoreme Talesa i teoreme 6.3.3. je

$$AC : AB : BC = A_1C : A_1B_1 : B_1C,$$

što se, s obzirom na podudarnost trouglova A_1B_1C i $A'B'C'$, svodi na (*).

Na sličan način postupamo i kad je $AC < A'C'$.

Slični su dokazi i sljedećih teorema.

Teorema 6.3.5. Posmatrajmo $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$.

Ako je $\measuredangle C \cong \measuredangle C'$ i $AC : BC = A'C' : B'C'$, onda su i ostali uglovi $\triangle ABC$ podudarni odgovarajućim uglovima $\triangle A'B'C'$ i zadovoljena je relacija (*).

Dokaz. Ako je $AC \cong A'C'$ iz datog uslova a na osnovu teorema 6.1.4. i 6.1.6. slijedi da je $BC \cong B'C'$. To znači da je $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ i sve tvrdnje teoreme

su tačne.
Ako je $AC > A'C'$ postoji tačka A_1 takva da je $A\,A_1\,C$ i $A_1C \cong A'C'$.
Prava koja sadrži A_1 a paralelna je sa AB siječe pravu BC u tački B_1. Prema teoremi Talesa je $AC : A_1C = BC : B_1C$ i ako uzmemo u obzir uslov $A_1C \cong A'C'$ onda je
$AC : A'C' = BC : B_1C$.
Dalje, na osnovu teoreme 6.1.5. je

$$AC : BC = A'C' : B_1C$$

Ako ovu relaciju uporedimo sa pretpostavkom teoreme i primenimo teoreme 6.1.6. i 6.1.4. dobijemo $B_1C \cong B'C'$. Otuda, s obzirom na naprijed postavljene uslove slijedi da je $\triangle A_1B_1C \cong \triangle A'B'C'$ što implicira da su i odgovarajući uglovi ovih trouglova podudarni.
Zbog $AB \parallel A_1B_1$ je

$$\angle CA_1B_1 \cong \angle CAB \quad i \quad \angle CB_1A_1 \cong \angle CBA$$

to i za $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ vrijedi

$$\angle A \cong \angle A' \quad \angle B \cong \angle B' \quad \angle C \cong \angle C'.$$

Na sličan način dokaz ide i u slučaju $AC < A'C'$.
Na sličan način se dokazuju sljedeće dvije teoreme.

Teorema 6.3.6 Ako je u $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$

$AC:AB:BC = A'C':A'B':B'C'$

onda su odgovarajući uglovi tih trouglova podudarni.

Teorema 6.3.7. Posmatrajmo $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$. Ako je $AC:AB = A'C':A'B'$, $AC > AB$ i $\angle B = \angle B'$ i ostali odgovarajući uglovi tih trouglova su podudarni, i $AC:BC = A'B':B'C'$.

4. Homotetija

Definicija. Transformacija koja tački X prostora pridružuje tačku X' tako da je

$$(*) \quad \overrightarrow{OX'} = k \cdot \overrightarrow{OX},$$

gdje je k realan broj različit od nule, zove se homotetija. Tačka O je centar, a broj k je koeficijent. Homotetiju označavamo ovako: $\mathcal{H}_{O,k}$. Ako je $O \in \alpha$, transformacija koja tački $X \in \alpha$ pridružuje tačku $X' \in \alpha$ tako da je zadovoljen uslov $(*)$, je homotetija u ravni α.

U vezi sa prethodnom definicijom primjetimo sledeće:

a) Tačka $X' = \mathcal{H}_{O,k}(X)$ je uslovom $(*)$ jednoznačno određena.

b) Ako je $k < 0$, tačke X, X' su s raznih strana tačke O. Homotetija je, dakle, uzajamno jednoznačno preslikavanje prostora na sama sebe (ravnina na samu sebe).

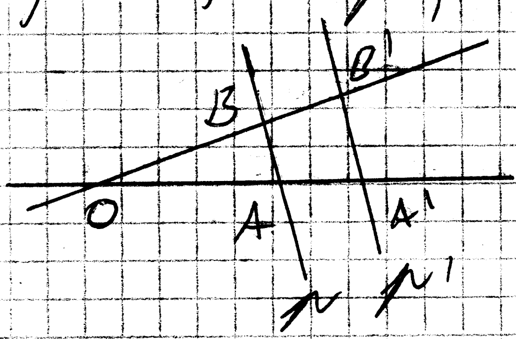
c) Centar homotetije je dvojna tačka preslikavanja i ako je $k \neq 1$, to je i jedina dvojna tačka. Ako je $k=1$, $\lambda_{O,k}$ je identična transformacija.

d) Iz definicije odmah slijedi

$$(\lambda_{O,k})^{-1} = \lambda_{O,k}^{-1} = \lambda_{O,\frac{1}{k}}.$$

e) U slučaju $k=-1$ homotetija se svodi na centralnu simetriju, i to na Σ_O ako se radi o homotetiji u prostoru i na G_O ako se radi o homotetiji u ravni.

Ako je a prava i $O \in a$, onda je, iz definicije jasno da je $\lambda_{O,k}(a)=a$.
Uočimo sada pravu p tako da $O \notin p$, neka je $A, B \in p$, $A' = \lambda_{O,k}(A)$, $B' = \lambda_{O,k}(B)$.



Tada je

$$\frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}} = k, \quad \frac{\overrightarrow{OB'}}{\overrightarrow{OB}} = k, \text{ tj.}$$

$$\frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}} = \frac{\overrightarrow{OB'}}{\overrightarrow{OB}},$$

pa je prema obrnutoj teoremi Talesa, $\underline{AB \parallel A'B'}$. Na taj način, dokazali smo slijedeću teoremu.

<u>Teorema 6.4.1</u> Pri homotetiji svaka prava se preslikava na paralelnu pravu. Prav

koja sadrži centar homotetije preslikava se na samu sebe.
Neposredna posljedica prethodne teoreme je
Posljedica 6.4.1 Ugao se, pri homotetiji, preslikava na podudarni ugao.
Na osnovu teoreme 6.3.3. je

$$\frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{AB}} = k, \text{ tj. } \frac{m(A'B')}{m(AB)} = |k|,$$

tj. dokazali smo sljedeću teoremu.
Teorema 6.4.2 Homotetija čiji je koeficijent k, preslikava duž čiji je mjerni broj, u datom sistemu mjerenja duži $m(AB)$, u paralelnu duž čiji je mjerni broj $|k|$ [redacted] $m(AB)$.
Teorema 6.4.3. Homotetija preslikava ravan u paralelnu ravan. Ravan koja sadrži centar homotetije preslikava se na samu sebe.
Dokaz. Neka tačka O ne pripada ravni α. Uočimo pravu a i b u ravni α tako da postoji tačka $a \cap b = \{P\}$. Ako je

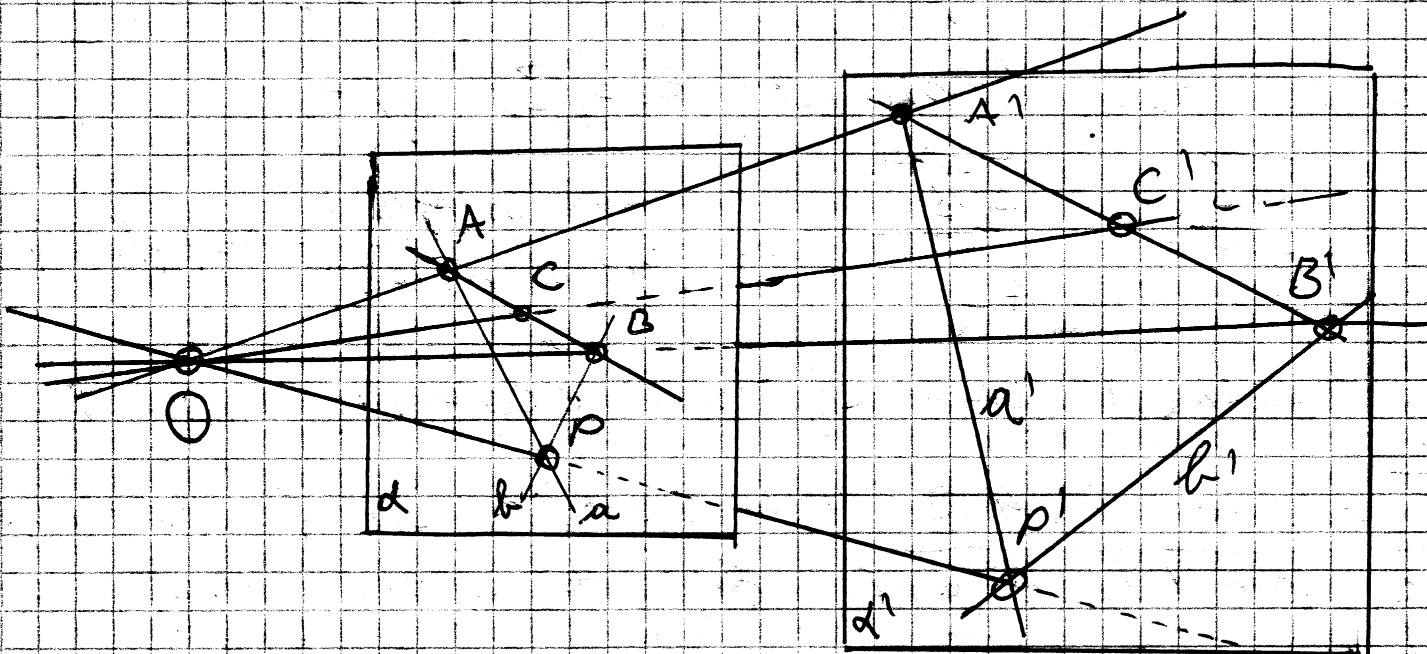
$$\mathcal{H}_{O,k}(a) = a', \quad \mathcal{H}_{O,k}(b) = b' \text{ onda je}$$

$$a \parallel a', \quad b \parallel b'.$$ Kako homotetija čuva kolinearnost tačaka to je $P' = \mathcal{H}_{O,k}(P) \in a'$ i $P' \in b'$ tj. $a' \cap b' = \{P'\}$.
Prave a' i b' određuju ravan α' i $\alpha' \parallel \alpha$.
Dokazaćemo da je za svako $C \in \alpha$, $C' = \mathcal{H}_{O,k}(C) \in \alpha'$.

Neka je $A \in a$. U opštem slučaju postoji tačka $\{B\} = \underline{AC} \cap b$. Tada je

$$A' = h_{O,k}(A) \in a', \quad B' = h_{O,k}(B) \in b',$$

što znači da je $\underline{A'B'} \subset \alpha'$.



S druge strane,

$$h_{O,k}(\underline{AB}) = \underline{A'B'},$$

pa kako je $C \in \underline{AB}$, to je

$$h_{O,k}(C) = C' \in \underline{A'B'}, \quad \text{tj. } C' \in \alpha'$$

Dakle $\quad h_{O,k}(\alpha) = \alpha' \quad$ i $\quad \alpha' \parallel \alpha$.

Ako je $O \in \alpha$, $h_{O,k}(\alpha) = \alpha$, što slijedi neposredno iz definicije homotetije. /

Teorema 4: Proizvod $\lambda_{O_2,k_2} \circ \lambda_{O_1,k_1}$ homotetija λ_{O_1,k_1} i λ_{O_2,k_2} je translacija ako je $k_1 \cdot k_2 = 1$. Ako je $k_1 \cdot k_2 \neq 1$ taj proizvod je homotetija λ_{O_3,k_3} i pritome $O_3 \in O_1O_2$ i vrijedi:

$$\frac{\overrightarrow{O_1O_3}}{\overrightarrow{O_3O_2}} = \frac{k_2-1}{k_2(k_1-1)}$$

→ razmjera je broj

Dokaz: Dokazaćemo samo prvi dio teoreme. Neka su A, B proizvoljne tačke i

$$A' = \lambda_{O_1,k_1}(A), \quad A'' = \lambda_{O_2,k_2}(A') = \lambda_{O_2,k_2} \circ \lambda_{O_1,k_1}(A)$$

$$B' = \lambda_{O_1,k_1}(B), \quad B'' = \lambda_{O_2,k_2}(B') = \lambda_{O_2,k_2} \circ \lambda_{O_1,k_1}(B)$$

Pri tome je $AB \parallel A'B' \parallel A''B''$ i

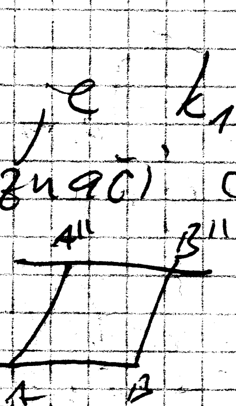
$$\frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{AB}} = k_1 \qquad \frac{\overrightarrow{A''B''}}{\overrightarrow{A'B'}} = k_2$$

Odavde je:

$$\frac{\overrightarrow{A''B''}}{\overrightarrow{AB}} = k_1 k_2$$

Ako je $k_1 k_2 = 1$ onda je $\overrightarrow{A''B''} = \overrightarrow{AB}$

To znači da su duži AB i $A''B''$ podudarne, prave AB i $A''B''$ paralelne i polupravi AB i $A''B''$ leže u



u toj poluravnini čija je ivica prava AA''.
Sada s obzirom na osobinu paralelograma
slijedi: $\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{BB''}$. Drugim riječima vrijedi:
vektor $\overrightarrow{A''B''} = T_{\overrightarrow{AA''}}(\overrightarrow{AB})$ T - translacija

Kako je i $A''B'' = \lambda_{O_2,k_2} \circ \lambda_{O_1,k_1}(AB)$

to je $\lambda_{O_2,k_2} \circ \lambda_{O_1,k_1} = T_{\overrightarrow{AA''}}$ ako se

radi o translaciji u prostoru.
Ako se radi o translaciji u ravni onda je

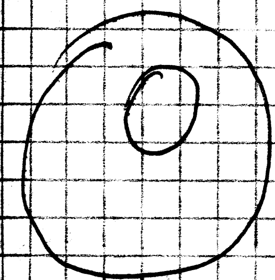
$\lambda_{O_2,k_2} \circ \lambda_{O_1,k_1} = \tau_{\overrightarrow{AA''}}$

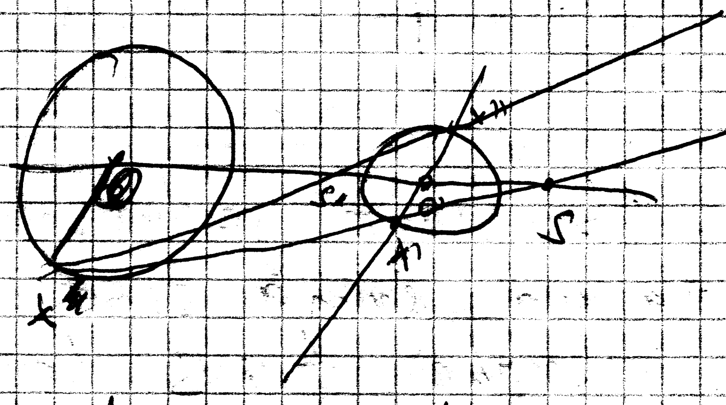
Primjedba: U vezi sa prethodnom teoremom primjetimo sljedeće:
a) homotetije o kojima se govori u prethodnoj teoremi, mogu imati zajednički centar, tada je $\lambda_{O,k_2} \circ \lambda_{O,k_1} = \lambda_{O,k_1} \circ \lambda_{O,k_2} = \lambda_{O,k}$
gdje je: $k = k_1 \cdot k_2$.
Iz toga svaka homotetija $\lambda_{O,k}$ može se prikazati kao proizvod dvije homotetije:
$\lambda_{O,k} = \lambda_{O,k_1} \circ \lambda_{O,k_2} = \lambda_{O,k_2} \circ \lambda_{O,k_1}$ gdje je $k = k_1 \cdot k_2$

b) Ako je $k<0$ onda imamo $\lambda_{O,k} = \lambda_{O,-1} \circ \lambda_{O,|k|}$

$$= \begin{cases} G_O \circ \lambda_{O,|k|} & \text{- ako se radi o homotetiji u ravni} \\ \Sigma_O \circ \lambda_{O,|k|} & \text{- ako se radi o homotetiji u prostoru} \end{cases}$$

Svake dvije kružnice koje leže jedna izvan druge i imaju različite radijuse su homotetične.





Uočimo kružnice $k(O,r)$ i $k'(O',r')$ gdje je $r \neq r'$. Neka je duž OX jedan radijus kružnice k. Uzmimo pravu koja sadrži centar O' i paralelna je sa pravom OX. Ako ~~ta~~ prava siječe kružnicu k' u tačkama X' i X'' onda ako su tačke X i X' sa iste strane prave OO' onda se prave OO' i XX' sijeku u vanjskom centru S homotetije. Prave OO' i XX'' sijeku se u unutrašnjem centru S_1 homotetije. Koeficijent prve homotetije je $\frac{r'}{r}$ a druge homotetije $-\frac{r'}{r}$.

Transformacije sličnosti u ravni

RSI

Definicija: Obostrano jednoznačno preslikavanje F prostora na samo sebe takvo da za svake dvije tačke A i B toga prostora vrijedi $\frac{F(A)F(B)}{AB} = k$ gdje je k pozitivan realan broj različit od nule (0) zove se transformacija sličnosti u prostoru. Restrikcija preslikavanja F na ravan α je transformacija sličnosti u ravni α.

Iz ove definicije neposredno slijede ove osobine:

1. transformacija inverzna transformaciji sličnosti je također transformacija sličnosti.
2. proizvod dvije transformacije sličnosti je također transformacija sličnosti.
3. za $k=1$ dobijamo

$$\frac{f(A)f(B)}{AB} = 1 \quad \text{tj.} \quad f(A)f(B) = AB$$

odatle slijedi da je f podudarnost.

Dakle svaka transformacija podudarnosti je specijalan slučaj transformacije sličnosti.

b. Neka za sličnost f postoje bar dvije dvojne tačke tj. $f(P)=P$, $f(Q)=Q$. Tada je $\frac{f(P)f(Q)}{PQ} = \frac{PQ}{PQ} = 1$ pa je opet f podudarnost. Dakle svaka transformacija sličnosti koja ima dvije dvojne tačke je transformacija podudarnosti.

c. Kao što znamo homotetija čiji je koeficijent k preslikava duž AB čiji je mjerni broj u datom sistemu mjerenja $m(AB)$, ~~tu~~ duž u paralelnu duž čiji je mjerni broj ~~[illegible]~~ $|k| \cdot m(AB)$. Odavde slijedi da je i homotetija transformacija sličnosti.

d. Kako je podudarnost specijalan slučaj transformacije sličnosti i kako je homotetija transformacija sličnosti to je i proizvod $\Pi \circ \lambda$ takođe transformacija sličnosti.

Sada želimo dokazati i obrnuto tj. da se svaka transformacija sličnosti može prikazati kao proizvod podudarnosti i homotetije. U tu svrhu najprije moramo dokazati tri leme:

Lema 1. Za proizvoljne dvije duži AB i $A'B'$ postoji proizvod $\Pi \circ \lambda$ homotetije i podudarnosti koji tačke A i B preslikava redom u tačke A' i B'.

Dokaz: Uočimo homotetiju λ čiji je centar u tački A a koeficijent $k = \frac{A'B'}{AB}$.

U toj homotetiji je $\lambda(A) = A$, $\lambda(B) = B_1$ i pritome je duž $AB_1 \cong A'B'$.

Sad ćemo se setiti sledeće teoreme:

Za dvije podudarne duži AB_1 i $A'B'$ postoji transformacija podudarnosti π tako da je $\pi(A) = A'$, $\pi(B_1) = B'$.

Sada je $\pi \circ \lambda(A) = A'$, $\pi \circ \lambda(B) = B'$. Ako $\pi \circ \lambda$ označimo sa ksi (ξ) imamo:

$$\xi(A) = A' \quad \text{i} \quad \xi(B) = B'$$

što je i trebalo dokazati.

Lema 2: Za proizvoljne duži AB, $A'B'$ postoje dvije i samo dvije sličnosti koje duž AB preslikavaju na duž $A'B'$. Jedna od njih je proizvod homotetije i transformacije podudarnosti prve vrste a druga je proizvod homotetije i transformacije podudarnosti druge vrste.

Dokaz: Neka je ksi ξ transformacija sličnosti iz leme je dana. Tada je:

$\xi(A) = A'$ i $\xi(B) = B'$. Neka je ξ'

KSI PRIM

neka druga sličnost tako da je

$\xi'(A)=A'$, $\xi(B)=B'$. Uočimo transformaciju $\xi\circ(\xi')^{-1}$. U ovoj transformaciji je: $\xi\circ(\xi')^{-1}(A')=\xi(A)=A'$ i

$$\xi\circ(\xi')^{-1}(B')=\xi(B)=B'.$$

tj. $\xi\circ(\xi')^{-1}(\overline{A'B'})=\overline{A'B'}$

drugim riječima transformacija sličnosti $\xi\circ(\xi')^{-1}$ preslikava polupravac $A'B'$ na tu istu polupravac. Kao što znamo tada je: ili $\xi\circ(\xi')^{-1}=i$ ili je

$$\underline{\xi\circ(\xi')^{-1}=\tilde{\sigma}_{A'B'}}$$

U prvom slučaju je $\xi'=\xi$ a u drugom

$\xi' = \sigma_{A'B'} \circ \xi$. Pošto je ξ transformacija slučnosti iz leme 1 to je $\xi = \Pi \circ \lambda$). Vrijedi dakle

$\xi' = \Pi \circ \lambda$ ili $\xi' = \sigma_{A'B'} \circ \Pi \circ \lambda$

Ako je Π transformacija podudarnosti prve vrste onda je $\sigma_{A'B'} \circ \Pi$ transformacija podudarnosti druge vrste.

Lema 3: Za svaka dva trougla $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ za koje vrijedi:

$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$ postoji jedna i samo jedna transformacija slučnosti koja tačke A, B, C preslikava redom u tačke A', B', C'.

Dokaz: Prema lemi 2 postoje dvije i samo dvije transformacije slučnosti koje tačke A i B preslikavaju redom u tačke A', B' ali samo jedna od njih preslikava tačku C u tačku $\check{C}$ one poluravni čija je ivica prava $A'B'$.

Aku tu transformaciju označimo sa ξ i ako je $\xi(C) = C_1$ onda je

$\frac{AC}{A'C_1} = \frac{AC}{A'C'}$ i $\frac{BC}{B'C_1} = \frac{BC}{B'C'}$

Odavde slijedi da se tačke C_1 i C' moraju poklopiti. Naime, dobije se da je:

$A'C_1 \cong A'C'$ i $B'C_1 \cong B'C'$ odakle slijedi:

$C' \equiv C_1$. Sada smo u mogućnosti dokazati teoremu:

Svaka transformacija sličnosti u ravni je proizvod transformacije podudarnosti i homotetije.

Dokaz: Neka je f transformacija sličnosti u ravni, i ABC proizvoljan trougao.

Prema definiciji transformacije sličnosti je

$$\frac{f(A)f(B)}{AB} = \frac{f(A)f(C)}{AC} = \frac{f(B)f(C)}{BC} \quad (*)$$

Odakle, sada imamo da trougla ~~trougla~~ $\triangle ABC$ i trougao $\triangle f(A)f(B)f(C)$ i vrijedi $(*)$

Prema tem. 3 postoji jednoznačno određena transformacija sličnosti ξ tako da je:

$$\xi(\triangle f(A)f(B)f(C)) = \triangle ABC \quad tj.$$

$$\xi \circ f(A) = A, \quad \xi \circ f(B) = B, \quad \xi \circ f(C) = C$$

$\xi \circ f$ je transformacija sličnosti koja ko- posjeduje više dvojnih tačaka pa je ona transformacija podudarnosti. No ona je podudarnost koja dopušta tri nekolinearne tačke tačke pa je ona identična biznu transformaciji

$$\xi \circ f = i \quad f = \xi^{-1} = (\pi \circ \lambda)^{-1} = \lambda^{-1} \circ \pi^{-1}$$

Kao neposredne posljedice prethodnih razmatranja imamo

<u>Posljedica 1:</u> Transformacija sličnosti u ravni jednoznačno je određena sa tri para odgovarajućih tačaka A, A', B, B', C, C' ako tačke A, B, C nisu kolinearne a zadovoljen je uslov:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

<u>Posljedica 2:</u> Transformacija sličnosti u ravni je kolineacija. Ona preslikava ugao na podudaran ugao.

<u>Definicija:</u> Transformacija sličnosti je prve vrste ako je ona proizvod transformacije podudarnosti prve vrste i homotetije. Transfor. ~~podud.~~ sličnosti je druge vrste ako je ona proizvod transf. podudarnosti druge vrste i homotetije.

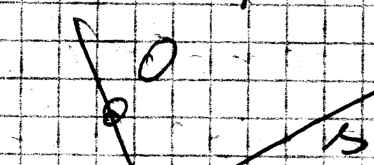
<u>Teorema:</u> Svaka transformacija sličnosti druge vrste koja je različita od transformacije podudarnosti može se pokazati kao proizvod osne simetrije i homotetije čiji centar pripada

osi simetrije.

Dokaz: Upravo smo dokazali da se svaka transformacija sličnosti druge vrste može prikazati kao proizvod trans. podud. 2. vrste i homotetije. Trans. podud. 2. vrste u ravni je ili osna simetrija ili klizna simetrija. Te najprije razmotrimo prvi slučaj.

Neka je

$$\xi = \Lambda_{O,k} \circ \sigma_s \qquad O \notin s$$



Označimo sa m pravu koja sadrži tačku O i normalna je na pravu s. Po definiciji osne simetrije je $s = \sigma_m(s)$. Tada je $\sigma_s = \sigma_{\sigma_m(s)}$. Ako se setimo teoreme:

Za svaku transformaciju podudarnosti π i za svaku pravu s je $\sigma_{\pi(s)} = \pi \circ \sigma_s \circ \pi^{-1}$ onda dobijamo:

$$\sigma_s = \sigma_{\sigma_m(s)} = \sigma_m \circ \sigma_s \circ \sigma_m^{-1} = \sigma_m \circ \sigma_s \circ \sigma_m$$

jer je osna simetrija involucija. $\sigma_m = \sigma_m^{-1}$

Ako je $\{O_1\} = m \cap s$ onda je $\sigma_m \circ \sigma_s = \sigma_{O_1}$

$\sigma_{O_1} = \Lambda_{O_1,-1}$. Na taj način dobijamo:

$$\xi = \Lambda_{O,k} \circ \sigma_s = \Lambda_{O,k} \circ \Lambda_{O_1,-1} \circ \sigma_m$$

Prema teoremu 4 je: $\lambda_{O,k} \circ \lambda_{O_1,-1} = \lambda_{O_2,-k}$

$O_2 \in \underline{OO_1} \equiv n$

Dakle $\xi = \lambda_{O_2,-k} \circ \sigma_{m}$, $O_2 \in m$ što je trebalo da se dokaže.

Drugi slučaj se stvarno svodi na prvi. Naime klizna simetrija može se prikazati kao proizvod osne simetrije i centralne simetrije tj. kao proizvod osne simetrije i homotetije. Drugim riječima ξ je sada proizvod osne simetrije i proizvoda dviju homotetija ~~i~~ prema teoremu 4 ξ je proizvod osne simetrije i homotetije.

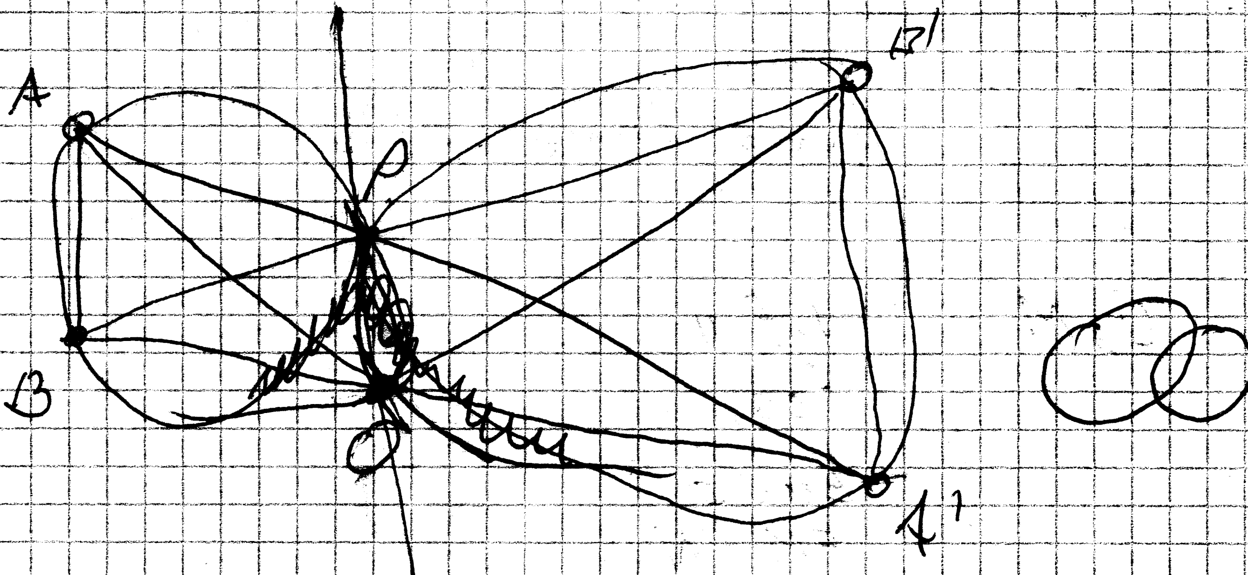
<u>Primjedba</u>: Primjetimo da iz posljednje teoreme odmah slijedi da za svaku sličnost ξ druge vrste postoji dvojna prava, postoji dvojna tačka koja pripada toj dvojnoj pravoj.

Sledeću <u>teoremu</u> navodimo bez dokaza:

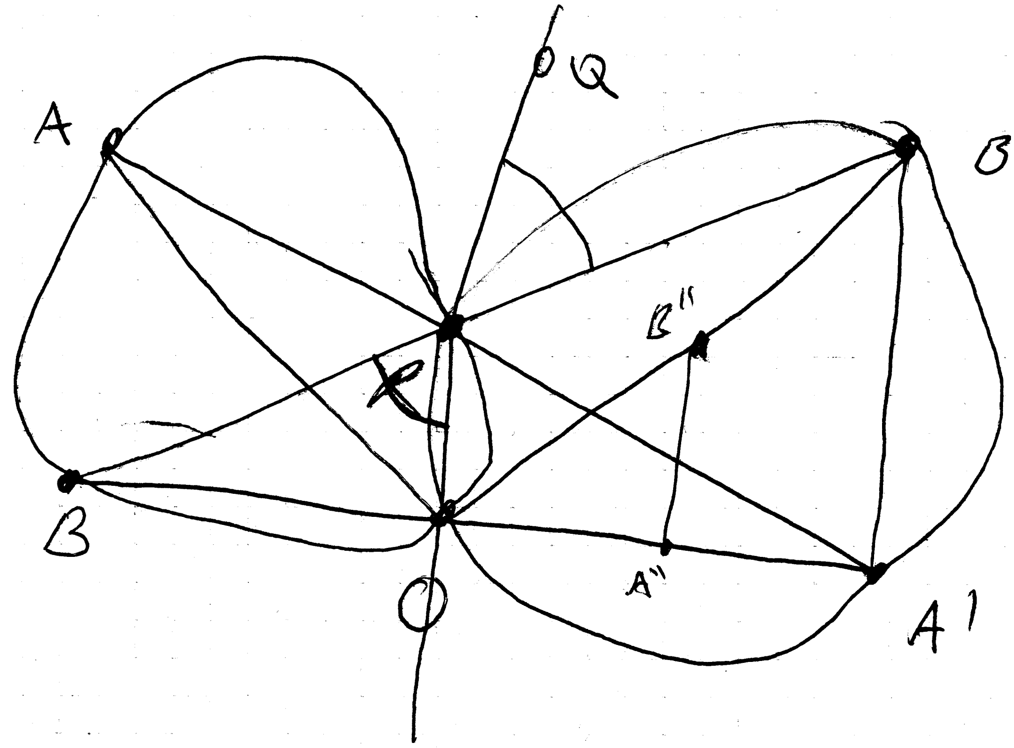
Ako pri transf. sličnosti koja je različita od transformacije podudarnosti postoji dvojna prava onda postoji i dvojna tačka koja pripada toj pravoj.

<u>Teorema</u>: Transformacija sličnosti prve vrste koja je različita od transform. podudarnosti može se prikazati kao proizvod rotacije i homotetije sa zajedničkim centrom.

<u>Dokaz</u>: Neka je ξ transf. sličnosti prve vrste. Pošto ξ nije podudarnost to postoji



u tačke A i B takav da ako je $\xi(A)=A'$,
$\xi(B)=B'$ prave AA' i BB' moraju se sjeći u
nekoj tački npr. P.
Naime ako bi bilo $\underline{AA' \parallel BB'}$ onda bi bilo
$\xi(\underline{AA'})=AA'$. Tada bi na svakom elementu
pravca koji je određen pravom AA' postojala
dvojna tačka pa bi ξ bila transformacija
sličnosti koja dopušta više dvojnih tačaka tj.
bila bi transformacija podudarnosti. To je
suprotno pretpostavci. Dakle prave AA' i BB'
moraju se sjeći. Na osnovu posljedice 1
dovoljno je dokazati da se duž AB preslikava
na duž $A'B'$ proizvodom rotacije i homote-
tije sa zajedničkim centrom. Oko trouglova
$\triangle APB$ i $\triangle A'PB'$ opišimo kružnice.
Drugu presječnu tačku ovih kružnica
označimo sa O. Ako se ove dvije
kružnice dodiruju dokaz je trivijalan.



Uglovi $\measuredangle AOB$ i $\measuredangle APB$ su periferiski na istim lukom AB, Uglovi $\measuredangle A'PB'$ i $\measuredangle A'OB'$ su periferiski nad istim lukom $A'B'$ a uglovi $\measuredangle APB$ i $\measuredangle A'PB'$ su unakrsni pa vrijedi:

$$\measuredangle AOB \overset{p.u}{\cong} \measuredangle APB \overset{u.u}{\cong} \measuredangle A'PB' \overset{p.u.}{\cong} \measuredangle A'OB'$$

Na pravoj OP uzmimo tačku Q tako da je O-P-Q. Uglovi $\measuredangle BAO$ i $\measuredangle BPO$ su periferiski nad istim lukom BO. Uglovi $\measuredangle QPB'$ i $\measuredangle BPO$ su unakrsni. Dalje, uglovi QPB' i $B'PO$ su naporedni a uglovi $B'PO$ i $B'A'O$ su naspramni uglovi tetivnog četverougla $OA'B'P$. Zbog svega navedenog vrijedi: $\measuredangle BAO \overset{p.u.}{\cong} \measuredangle BPO$ (1)

$\measuredangle BPO \cong \measuredangle B'PQ$ (2)

$\sphericalangle P'PQ + \sphericalangle B'PO = 180°$ - ravan ugao

$\sphericalangle B'PO + \sphericalangle B'A'O = 180°$

iz posljednje dvije jednakosti slijedi

$\sphericalangle B'PQ \cong \sphericalangle B'A'O$ (3)

Iz (1), (2) i (3) slijedi $\sphericalangle BAO \cong \sphericalangle B'A'O$

Dokazali smo da su uglovi trougla ΔAOB i $\Delta A'OB'$ podudarni. Ti uglovi imaju jedan zajednički vrh pa slijedi da postoji rotacija $\rho_{O,\alpha}$ koja polupravu OA preslikava na polupravu OA' a polupravu OB preslikava na polupr. OB'. Ako je:

$$\rho_{O,\alpha}(A) = A'' \quad ;$$

$$\rho_{O,\alpha}(B) = B''$$

onda je $\underline{A''B''} \parallel \underline{A'B'}$ i $\sphericalangle B'A'O \cong \sphericalangle BAO$
$\cong \sphericalangle B''A''O$

Odavde slijedi da postoji homotetija čiji je centar u O a koeficijent $k = \frac{OA'}{OA}$

tako da je $\lambda_{O,k}(A'') = A'$

i $\lambda_{O,k}(B'') = B'$

Konačno imamo $\lambda_{O,k} \circ \rho_{O,\alpha}(A) = A'$

$$\lambda_{O,k} \circ \rho_{O,\alpha}(B) = B'$$ što je trebalo

i da se dokaže.

<u>Definicija</u>

Proizvod rotacije i homotetije sa zajedničkim centrom zove se centralno slična rotacija. Proizvod osne simetrije i homotetije pri čemu centar homotetije pripada osi simetrije zove se centralno slična simetrija.

Sada smo u mogućnosti da damo teoremu o klasifikaciji transformacija sličnosti u ravni. Transformacija sličnosti u ravni je jedna od sljedećih transformacija:

a) Transformacija podudarnosti
b) Homotetija
c) Centralno slična rotacija
d) Centralno slična simetrija

<u>Definicija</u>.

Neka je F figura u ravni. Kažemo da je figura F' slična sa figurom F i to zapisujemo ovako $F' \sim F$ ako postoji transformacija sličnosti ξ tako da je

$$\xi(F) = F'$$

$$\boxed{\text{KSI} \quad \xi}$$

<u>Dokazaćemo</u> ~~da~~ je sličnost relacija ekvivalencije.
Pošto je uvijek $F \cong F$ a podudarnost je specijalan slučaj sličnosti to je sličnost refleksivna relacija.
Neka je $F' \sim F$. Po definiciji znači da postoji transformacija sličnosti ξ tako da je $\xi(F) = F'$. Pošto je transformacija sličnosti obostrano jednoznačno preslikavanje dobivamo:

$$\xi^{-1}(F') = F$$ što po definiciji znači

$F \sim F'$ pa je relacija i simetrična.
Neka je $F' \sim F$ i $F'' \sim F'$. Po definiciji znači da postoje transformacije sličnosti ξ_1 i ξ_2 takve da je $\xi_1(F) = F'$ i $\xi_2(F') = F''$. Sada je $F'' = \xi_2(F') = \xi_2(\xi_1(F))$

$$= (\xi_2 \circ \xi_1)(F)$$

Po definiciji znači da je $F'' \sim F$. Time <u>smo</u> dokazali da je sličnost relacija ekvivalencije.
Sada se neke <u>leme</u> i teoreme iskazane naprijed mogu iskazati ovako: ako je u

$\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ $AB : AC : BC = A'B' : A'C' : B'C'$

Onda je trougao $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, ili ako su u trouglovima $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ odgovarajući uglovi podudarni onda je $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Transformacije sličnosti u prostoru

I za sličnost u prostoru vrijede teoreme analogne teoremamana za sličnost u ravni. I ovdje ćemo dokazati da je svaka sličnost u prostoru proizvod podudarnosti i homotetije no prije toga dokazaćemo dvije leme:

Lema 1 Ako su $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ dva trougla u prostoru tako da vrijedi:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k$$ onda postoje

dvije i samo dvije transformacije sličnosti koje tačke A, B i C. Preslikavaju redom u tačke A', B' i C'. Jedna od njih je proizvod homotetije i transformacije podudarnosti prve vrste a druga je proizvod homotetije i transformacije podudarnosti druge vrste.

Dokaz: Označimo sa λ LAMBDA homotetiju čiji je centar u tački A a koeficijent k. U toj homotetiji je:

$k = \frac{A'B'}{AB}$

$\lambda(A)=A$ $\quad \lambda(B)=B_1$ i $\lambda(C)=C_1$

Pri tome je $AB_1 \cong A'B'$

$$AC_1 \cong A'C' \quad \text{i}$$

$$B_1C_1 \cong B'C'$$

Kao što znamo postoji transformacija podudarnosti π tako da je

$$\pi(A)=A'$$

$$\pi(B_1)=B' \quad \text{i} \quad \pi(C_1)=C'$$

Drugim riječima proizvod homotetije i transformacije podudarnosti preslikava tačke $(\pi \circ \lambda)$ A, B, C u tačke A', B', C'.
Ako taj proizvod označimo sa ξ imamo:

$$\xi(A)=A' \quad \xi(B)=B' \quad \xi(C)=C'$$

Neka je ξ' neka druga sličnost tako da je

$$\xi'(A)=A'$$

$$\xi'(B)=B' \quad \text{i} \quad \xi'(C)=C'$$

Proizvod $\xi \circ (\xi')^{-1}$ je proizvod dvije sli-

čnosti pa je sličnost, i u toj sličnosti

je i

$$\xi \circ (\xi')^{-1}(A') = A' \quad \xi \circ (\xi')^{-1}(B') = B'$$

$$i \quad \xi \circ (\xi')^{-1}(C') = C'$$

Drugim riječima ova transformacija je ustvari podudarnost koja ravan $A'B'C' = \alpha'$ preslikava na tu istu ravan.

Kao što znamo ta transformacija je ili identična transformacija ili ravanska simetrija:

sigma

$$\xi \circ (\xi')^{-1} = i \quad \text{ili je} \quad \xi \circ (\xi')^{-1} = \Sigma_{\alpha'}$$

odavde je ili

$$\xi' = \xi = \pi \circ \lambda$$

$$\xi' = \Sigma_{\alpha'} \circ \xi = \Sigma_{\alpha'} \circ \pi \circ \lambda$$

ako je π trans. podud. prve vrste onda je

$\Sigma_{\alpha'} \circ \pi$ transformacija druge vrste što je i trebalo da se dokaže.

Lema 2 Ako su A, B, C i D nekomplanarne tačke i A', B', C' i D' također nekomplanarne tačke i ako je

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AD}{A'D'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{BD}{B'D'} = \frac{CD}{C'D'}$$

onda postoji jednoznačno određena transformacija sličnosti ξ koja tačke A, B, C i D preslikava redom u tačke A', B', C' i D'.

Dokaz: Prema lemi 1 postoje dvije transformacije sličnosti koje tačke A, B i C preslikavaju u tačke A', B' i C' ali samo jedna od njih preslikava tačku D u tačku koja pripada onom poluprostoru čija je granica $A'B'C'$ i u kojem leži tačka D'. Ako je $\xi(D) = D_1$ onda je:

$$\frac{AD}{A'D'} = \frac{AD}{A'D_1}, \quad \frac{BD}{B'D'} = \frac{BD}{B'D_1}, \quad i$$

$$\frac{CD}{C'D'} = \frac{CD}{C'D_1}$$ odavde slijedi da se tačke D' i D_1 poklapaju.

Teorema Svaku sličnost u prostoru je proizvod podudarnosti i homotetije.

Dokaz Neka je f sličnost u prostoru i neka su A, B, C i D četiri nekomplan. tač. Prema definic. transformac. sličnosti vrijedi

$$(*) \quad \frac{f(A)f(B)}{AB} = \frac{f(A)f(C)}{AC} = \frac{f(A)f(D)}{AD} =$$

$$= \frac{f(B)f(C)}{BC} = \frac{f(B)f(D)}{BD} = \frac{f(C)f(D)}{CD}$$

Prema tome imamo nekomplanarne tačke A, B, C i D i nekomplanarne tačke $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ i $f(D)$ i vrijedi $(*)$. Na osnovu leme 2 postoji jednoznačno određena transformacija sličnosti ξ takva da je:

$$\xi \circ f(A) = A \qquad \xi \circ f(B) = B$$

$$\xi \circ f(C) = C \quad i \quad \xi \circ f(D) = D$$

Znači transformacija $\xi \circ f$ četiri nekomplanarne tačke prostora preslikava na same sebe pa je ta transformacija identična transformacija i $\xi \circ f = i$ tj. $f = \xi^{-1}$

Pošto je $\xi = \pi \circ \lambda$ sad je

$$f = (\pi \circ \lambda)^{-1} = \lambda^{-1} \circ \pi^{-1}.$$

Navešćemo nekoliko posljedica:

1. Transformacija sličnosti u prostoru jednoznačno je određena sa četiri para odgovarajućih tačaka A i A', B i B', C i C', D i D' ako tačke A, B, C i D nisu komplanarne a zadovoljen je uslov

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AD}{A'D'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{BD}{B'D'} = \frac{CD}{C'D'}$$

Posljedica 2. Transformacija sličnos. u prostoru preslikava ravan na ravan, poluravan na poluravan, dijedar na podudaran dijedar. U transformaciji sličnosti u prostoru normalnost prave i ravni, odnosno normalnost dviju ravni ostaju očuvane.

3. Svaka transform. sličnosti u prostoru koja je različita od transfor. podudarnosti ima dvojnu tačku.

4. Sličnost u prostoru koja je različita od podudarnosti uvijek se može prikazati kao proizvod rotacije i homotetije, pri čemu osa rotacije sadrži centar homotetije.